Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2000

2000 青少年數學國際城市邀請賽個人競賽試題

第一部份： 填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 17^{2000} 的個位數字為__________。

2. 從 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{15}$、$\frac{1}{18}$ 中去掉兩項，使得於下各項的和等於 $\frac{2}{3}$，則所去掉的這兩項的乘積為__________。

3. 設 A 為小於 1000 且大於 100 的奇數，若 A 的百位數大於它的個位數，且 A 是 11 的倍數，則滿足這些條件所有可能的 A 值中最小者為__________。

4. 將介於 150 與 650 之間除以 10 餘 4 的整數全部相加的總和為__________。

5. 設 $N=111\cdots1222\cdots2$，其中 1 有 2000 個、2 有 2000 個；若 N 被 $\underbrace{666\cdots6}_{2000\text{個}}$除時，則其商數是__________。

6. 著名的哥德巴赫(Goldbach)猜想是：對於任一個大於 7 的偶數一定可以表示為兩個不同質數的和，例如 $10 = 3+7$；我們希望找到不同質數 p、q 使得 $p+q = 192$，並讓 $2p-q$ 越大越好，則數對(p, q)=__________。

7. 在$\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{BC}$ 上的一點，若 $\overline{AC}=\overline{CD}$ 且 $\angle CAB = \angle ABC + 45^\circ$，則 $\angle BAD$ 的度數為__________。

8. 已知 $100000035811ab1^2 = 1000000cde2247482444265735361$，其中 a、b、c、d、e 皆為小於 10 的非負整數，則 $a+b+c-d-e$ 的值為__________。

9. 在長方形 $ABCD$ 中，P 為此長方形內部的一點。若 $\overline{PA}=4$、$\overline{PB}=6$、$\overline{PD}=9$，則 $\overline{PC}$ 的長度為__________。

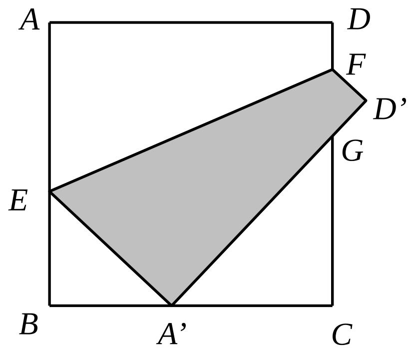
10. 某種新的溫度計的水結冰時顯示的度數為 20 度，在水煮沸時為 160 度(攝氏溫度計水的冰點為 0 度，沸點為 100 度)，則攝氏 215 度相當於該種新的溫度計__________度。

11. 已知一正方形 $ABCD$ 內接於圓 O，將此圓對折成一個半圓，作正方形 $EFGH$ 使其內接於此半圓，則正方形 $EFGH$ 之面積與正方形 $ABCD$ 之面積的比為__________。

12. 有一疊 10 張紙牌，每張紙牌上都印有一個正整數，已知連續的三張紙牌上的正整數的和都是 20，且第一張紙牌上的數為 2，第九張紙牌上的數為 8，則第五張紙牌上的數為_________。

第二部份、計算證明題共三小題，每題 20 分（請寫在答案卷對應題號內，需詳列出計算證明過程）

1. 摺疊一正方形的紙張 $ABCD$，使得 A 點落在 $\overline{BC}$ 邊上 A' 點的位置，及 D 點落在 D' 點的位置，這樣我們得到摺線 $\overline{EF}$ (如圖所示)，其中 E 點在 $\overline{AB}$ 邊上、F 點在 $\overline{CD}$ 邊上，摺疊後，$\overline{A'D'}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 G 點。試證：$\overline{A'E}+\overline{FG}=\overline{A'G}$。



2. 有十張正面與反面都寫上一個正整數的卡片，這十張卡片上面的 20 個正整數都不同，每張卡片的正反兩面上的數之和都相等，且所有十張卡片正面之數的總和等於所有十張卡片反面之數的總和。若其中九張卡片正面之數分別為 2、5、17、21、24、31、35、36、42，試問第十張卡片正面的數為多少？

3. 從 100 到 999 的每一個正整數皆稱為三位數，從 1000 到 9999 的每一個正整數皆稱為四位數；任一個正整數組成它的每一個數字相加的和稱為該正整數的數字和，例如 312 的數字和為 6。假設 a、b、c 皆為正整數，其中 a、b 為三位數，c 為四位數，若 $a+b$、$b+c$ 和 $c+a$ 的數字和都等於 3，試問 $a+b+c$ 最大的值為多少？