Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2000

2000 青少年数学国际城市邀请赛队际竞赛试题

1. E 点为正方形 $ABCD$ 的 $\overline{BC}$ 边中点、H 点在 $\overline{EA}$ 上使得 $\overline{BE}=\overline{EH}$ 、而 X 点在 $\overline{AB}$ 上使得 $\overline{AH}=\overline{AX}$ 。试证：

$$\overline{AB}\times\overline{BX}=\overline{AX}^2 。$$

2. 将非负整数填入 5×5 的方格表中，其中四个空格已分别填入四个正整数(如图所示)，试将其余 21 个空格的每个空格分别填入一个正整数，使得大正方形的每一行及每一列上的数字和都相等。

	82			
				79
		103		
0				

3. 对于 $n\geq 1$，定义 $a_n=1000+n^2$ 。请求出 a_n 与 a_{n+1} 的最大公因子之最大值。

4. 某校国一有 A、B、C、D、E 五个班级，这五个班级的导师分别为 a(A 班)、b(B 班)、c(C 班)、d(D 班)与 e(E 班)。某次段考后，这五位导师预先猜测各班成绩总平均的顺序排列如下表：

名次 / 导师	第一名	第二名	第三名	第四名	第五名
a	A	B	C	D	E
b	E	D	A	B	C
c	E	B	C	D	A
d	C	E	D	A	B
e	E	B	C	A	D

成绩公布后，这五班级的成绩总平均都不相同，结果发现到只有两位导师恰好各猜中二个班级的名次，其余三位导师全部猜错这五个班级的名次，试问这五个班级成绩总平均正确的名次是什么？

5. 试求满足 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2$ 的所有的正整数 a、b、c，其中 $a\leq b\leq c$ 。

6. 给边长为 4 公分的正方形及三角形纸片各 50 个，试利用这些纸片为凸多面体的面来构造一些尽可能多的凸多面体(不限正多面体)。如果所构造出的凸多面体之顶点数、边数、正方形面数与三角形面数都相等的凸多面体视为重复。