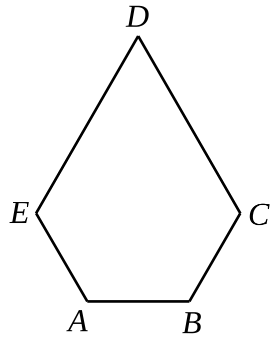
Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition 2001

2001 青少年數學國際城市邀請賽個人競賽試題

第一部份： 填充題，請將答案填寫在題末所附的空格內，共十題，每題 6 分。

1. n 為整數，若 $1+2+\ldots+n$ 的和恰等於一個三位數，且此三位數的每個數字皆相同。試找出所有可能的 n。

2. 五邊形 $ABCDE$〈如圖〉中，$\angle A=\angle B=120^\circ$、$\overline{EA}=\overline{AB}=\overline{BC}=2$、 $\overline{CD}=\overline{DE}=4$。試求五邊形 $ABCDE$ 的面積。



3. 若將一個 6 厘米 ×6 厘米的正方形蓋在一個三角形上，則最多可蓋住此三角形 60% 的面積。反之，若將此三角形蓋在此正方形上，則最多可蓋住此正方形 $\frac{2}{3}$ 的面積。試求這個三角形的面積。

4. 有一組連續的四個正整數，從小到大依次排列，第一個數是 5 的倍數；第二個數是 7 的倍數；第三個數是 9 的倍數；第四個數是 11 的倍數。試求此四個連續正整數。

5. 在 5 時到 6 時之間，某人看錶時，由於不慎將時針看成分針，造成他看到的時間比正確的時間大約早了 55 分鐘。試問他看到的時間比正確的時間實際上早了幾分鐘？

6. $\triangle ABC$ 的內切圓分別與三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 切於 D、E、F。若內切圓半徑為 4，且 $\overline{BD}$、$\overline{CE}$、$\overline{AF}$ 之長是連續整數。試求$\triangle ABC$ 的三邊長。

7. 試求出所有的質數 P，使得下列方程組有整數解 ：

$$\begin{cases} p+1=2x^2 \\ p^2+1=2y^2 \end{cases}$$

8. 解方程式：$\sqrt{3x^2-18x+52}+\sqrt{2x^2-12x+162}=\sqrt{-x^2+6x+280}$。

9. 化簡 $\sqrt{12-\sqrt{24}+\sqrt{39}-\sqrt{104}}-\sqrt{12+\sqrt{24}+\sqrt{39}+\sqrt{104}}$。

10. 設 $M=1010101\ldots01$，其中數字 1 出現 k 次。試求出最小的 k 值使得 M 能被 1001001001001 整除。

第二部份： 計算及證明題，請在題目下面空白處寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. a、b 為兩個相異的正實數。若 $A=\dfrac{a+b}{2}$ 、$G=\sqrt{ab}$ ，試證： $G<\dfrac{(a-b)^2}{8(A-B)}<A$

2. 試確定實數 p 的範圍，使得方程式 $3^{2x}-3^{x+1}=p$ 有兩個相異正實數解。

3. 已知一個正方形的四個頂點落在一個銳角三角形的邊上，其中二條邊上各有一個頂點而第三條邊上有二個頂點。若要使這個正方形的面積最大，請問有二個頂點落在上面的邊之邊長應該是最長的，或是最短的，或是以上兩者皆不是？請證明你的答案。