



International Mathematics Competition, 25~29 July, 2010, Incheon, Korea,

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

青少年数学国际城市邀请赛

个人赛试题

答题指引：

- 请勿翻开此页，直到听到答题指令为止。
- 请在下页的对应位置填写队名、您的姓名及编号。
- 个人赛试题包括二个部份，总分 120 分。
- 第一部份包括填充题 12 题，只须在空格内填写阿拉伯数值答案，以其它文字书写一律不计分，不须计算过程，若题目有不只一个答案，则全部答对才给分。每题 5 分，答错不倒扣。
- 第二部份包括计算证明题 3 题，必须填写详细计算过程或证明，每题 20 分，根据答题情况给予部份分数。
- 本卷答题时间：120 分钟。
- 不得使用任何电子计算器具。
- 可使用铅笔、蓝色或黑色圆珠笔作答。
- 答题结束后，监试人员会将所有纸张收回。

Simplify Chinese Version

简体中文版



International Mathematics Competition, 25~29 July, 2010, Incheon, Korea,

Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

个人赛试题

答题时间：120 分钟

2010/07/27 韩国 仁川

队名：_____ 姓名：_____ 编号：_____ 得分：_____

第一部份：填充题，请将答案填写在题末所附的空格内，共十二题，每题 5 分。

1. 实数 p 、 q 、 r 满足 $p+q+r=26$ 和 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 31$ 。请问 $\frac{p}{q} + \frac{q}{r} + \frac{r}{p} + \frac{p}{r} + \frac{r}{q} + \frac{q}{p}$ 的值为多少？

答：_____

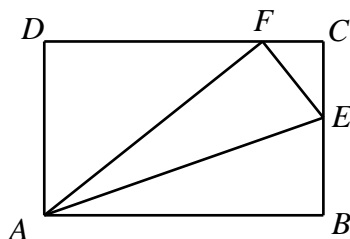
2. 在某次慈善募款餐会上，每人吃了半盘米饭、三分之一盘蔬菜和四分之一盘肉。此餐会总共吃掉 65 盘食物，请问这次募款餐会共有多少人参加？

答：_____

3. 请问满足 $xyz = 3^{2010}$ 与 $x \leq y \leq z < x + y$ 的三元正整数组 (x, y, z) 共有多少组？

答：_____

4. 点 E 为长方形 $ABCD$ 的边 BC 上的一点，如果沿着 AE 折叠，则顶点 B 刚好与边 CD 上的点 F 重合，如图所示。假定 $AD = 16$ cm 和 $BE = 10$ cm，请问 AE 的长度为多少 cm？



答：_____ cm

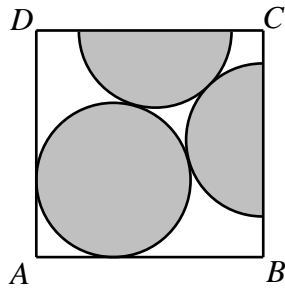
5. 有一个四位数，它恰好有 14 个因子（包括 1 和它本身），且它的一个质因子的个位是 3。请问满足上述条件的最小四位数是什么？

答：_____

6. $f(x)$ 为一个关于 x 的四次多项式， $f(t)$ 表示当 $x=t$ 时该多项式的值，若 $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ ， $f(4) = 6$ ， $f(5) = 72$ ，请问 $f(2010)$ 的值的末位数是什么？

答：_____

7. 在正方形 $ABCD$ 中，一个圆和两个半圆两两相切，它们的半径都为 1 cm ，且圆与正方形的两边也相切，如下图所示。请问正方形 $ABCD$ 的面积为多少 cm^2 ?



答: _____ cm^2

8. 设 p 与 q 为质数，且满足 $p^3 + q^3 + 1 = p^2q^2$ ，请问 $p + q$ 的最大值为多少?

答: _____

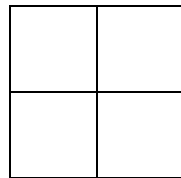
9. 今有 n 个正整数(不一定相异)，它们的和为 100 ，其中任何 7 个数之和小于 15 ，请问 n 的最小值是多少?

答: _____

10. 点 P 是三角形 ABC 内的一点使得 $\angle ABP = 20^\circ$ 、 $\angle PBC = 10^\circ$ 、 $\angle ACP = 20^\circ$ 且 $\angle PCB = 30^\circ$ ，请问 $\angle CAP$ 为多少度?

答: _____ $^\circ$

11. 某位农民养了 100 头猪和 100 只鸡。他有四个正方形的院子，构成 2×2 的方格。该农民想把他的牲畜分配到各个院子内使得第一行有 120 个头，第二行有 300 只脚；第一列有 100 个头，第二列有 320 只脚。请问总共有多少种不同的分配方式?



答: _____ 种方式

12. 有五个笼子排成一排，从左到右的标签如下图所示。每个笼子里面各恰有一只动物。

红色	银色	棕色	白色	灰色
狼	狮子	狐狸	牛	马

这五只动物的确是一匹狼、一只狮子、一只狐狸、一头牛和一匹马，并且它们的颜色的确是红色、银色、棕色、白色和灰色。但是，每张标签标示的颜色与该标签上标示的动物的颜色不符合(例如,狼不是红色)。再者，每只动物都不在与标签上所标示的颜色或种类相符的笼子内，也不在与其相邻的笼子内。如果马不在中间的那个笼子里，请问马是什么颜色?

(注：答案请用 **R, S, B, W, G** 分别代表红、银、棕、白、灰色。)

答: _____

第二部份：计算及证明题，请在题目下面空白处写出计算或证明过程。共三题，每题 20 分。

1. 点 A 和点 B 在一个正方形的边上，线段 AB 把这个正方形分割成两个多边形，每个多边形都有内切圆。其中一个内切圆的半径为6 cm，而另外一个内切圆的半径大于6 cm。请问正方形的边长与两倍的线段 AB 的长度之差为多少 cm？
2. 在一个糖果店里卖的糖果有三种包装，分别是小包有6颗，中包有9颗和大包有20颗。如果我们只按整包购买糖果，请问我们不能购买到的糖果数最多是多少颗？
3. 有一数列 $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$ 。对于 $1 \leq n \leq 2010$ ，其中 n 为正整数，令 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。若 $a_1 = 2010$ ，且对所有的 n ，都有 $S_n = n^2 a_n$ ，请问 a_{2010} 的值是多少？